

II.2.4.3. Ecuatia de conservare a energiei pentru sisteme macroscopice (ecuatia Bernoulli)

Curgerea unui fluid este cauzata de o forta care se exercita asupra acestuia, ceea ce *implica un consum de energie*. Acest consum de energie poate fi calculat dintr-un bilant al energiilor care intervin la curgerea fluidului.

Bilantul energiilor pentru curgerea neizoterma aplicat asupra unui volum de dimensiuni infinit mici conduce la o ecuatie diferentiala foarte complicata denumita *ecuatia energiei*.

Pentru cazul mai simplu al curgerii printr-un sistem macroscopic ecuatia care exprima conservarea energiei este mai simpla si se numeste *Ecuatia Bernoulli*.

Pentru deducerea acestei ecuatii se considera un sistem macroscopic format dintr-o conducta cu sectiunea variabila, amplasata intr-o pozitie oarecare. Volumul de control pentru care se intocmeste bilantul energiilor este delimitat de peretele interior al conductei si de sectiunile S_1 si S_2 situate la inaltimile H_1 , respectiv H_2 fata de un plan de referinta.

Pe aceasta portiune de conducta unitatea de masa a fluidului primeste din exterior lucrul mecanic L_M si cantitatea de caldura, Q .

$$\frac{dE}{dt} = \sum E_i - \sum E_e \quad (\text{II.112})$$

in regim stationar:

$$\sum E_i = \sum E_e \quad (\text{II.113})$$

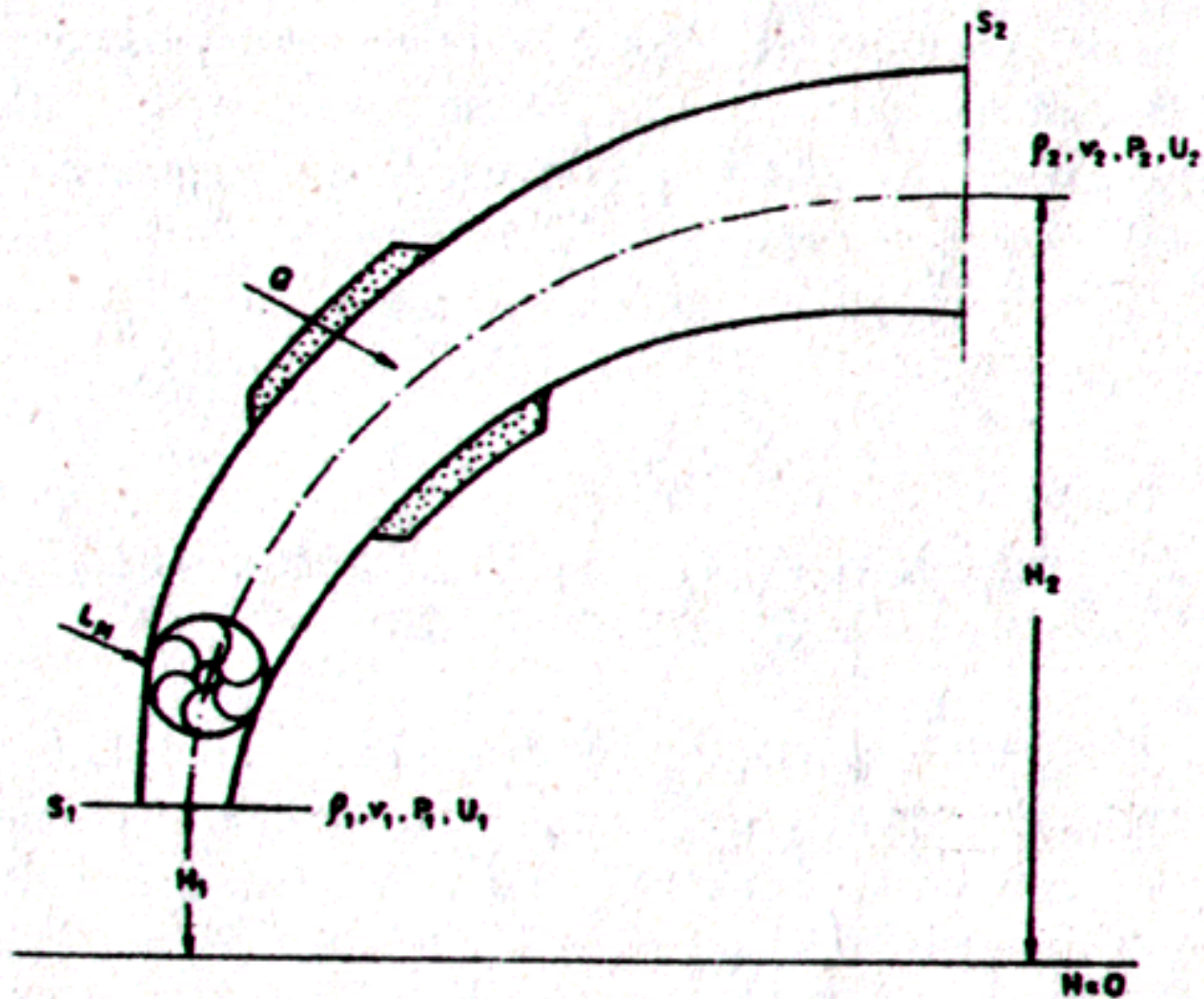


Fig. II.26

Volumul de control al unui sistem macroscopic utilizat pentru deducerea ecuatiei Bernoulli.

Energiile care intervin la curgerea fluidului in sistemul considerat, raportate la unutatea de masa de fluid sunt:

- *la intrarea in sistem prin sectiunea S_1* :

– energia potentiala: gH_1

– energia cinetica: $\frac{1}{2}v_1^2$

– energia data de presiunea statica: P_1V_{s1}

– energia interna a fluidului: U_1

– energia mecanica: L_M

– energia calorica: Q

- la iesirea din sistem prin sectiunea S_2

– energia potentiala: gH_2

– energia cinetica: $\frac{1}{2}v_2^2$

– energia data de presiunea statica: $P_2 V_{s2}$

– energia interna a fluidului: U_2

In aceste expresii: g este constanta acceleratiei gravitationale; H – inaltimea; v – viteza medie; P – presiunea statica; iar $V_s = \frac{1}{\rho}$ este volumul specific.

Inlocuind expresiile energiilor in ecuatiile de bilant, pentru curgerea in regim stationar, se obtine:

$$gH_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + P_1V_{s1} + U_1 + L_M + Q =$$

$$gH_2 + \frac{1}{2}v_2^2 + P_2V_{s2} + U_2 \quad (\text{II.114})$$

Relatia anterioara se explicitieaza in raport cu lucrul mecanic consumat din exterior si rezulta:

$$L_M = g(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + (P_2V_{s2} - P_1V_{s1}) + (U_2 - U_1) - Q$$

$$(\text{II.115})$$

Este incomod a se lucra cu energii interne si de aceea se exprima variatia energiei interne $\Delta U = U_2 - U_1$, conform principiului I al termodinamicii:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q^l - \int_{V_{s1}}^{V_{s2}} P dV_s \quad (\text{II.116})$$

in care: Q^l este caldura totala din sistem, data de suma dintre caldura introdusa din exterior Q , si caldura rezultata in urma disiparii a unei parti din energia fluidului, E_p ca urmare a frecarilor si a inertiei:

$$Q' = Q + E_p \quad (\text{II.117})$$

Printr-un artificiu de calcul, variatia energiei statice poate fi exprimata astfel:

$$P_2 V_{s2} - P_1 V_{s1} = \int_{P_1 V_{s1}}^{P_2 V_{s2}} d(PV_s) = \int_{V_{s1}}^{V_{s2}} P dV_s + \int_{P_1}^{P_2} V_s dP \quad (\text{II.118})$$

Care dupa inlocuire in expresia lucrului mecanic si a simplificarilor corespunzatoare conduce la:

$$L_M = g(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \int_{P_1}^{P_2} V_s dP + E_p \quad (\text{II.119})$$

Relatia de mai sus este *ecuatia lui Bernoulli* in forma generala. Rezolvarea integralei din ecuatia de mai sus necesita cunoasterea *ecuatiei de stare a fluidului*: $\rho=f(P,T)$.

a) Pentru fluide necompresibile in curgere izoterma, $\rho = \text{constant}$, si deci volumul specific: $V_s = 1/\rho$, este independent de presiune. In acast caz:

$$\int_{P_1}^{P_2} V_s dP = \frac{1}{\rho} \int_{P_1}^{P_2} dP = \frac{P_2 - P_1}{\rho} \quad (\text{II.120})$$

$$L_M = g(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + E_p \quad (\text{II.121})$$

In ecuatia de mai sus fiecare termen are dimensiunea unei energii raportata la unitatea de masa:

$$[gH]_{SI} = \frac{m}{s^2} m = \frac{kg \cdot m \cdot m}{s^2 \cdot kg} = \frac{N \cdot m}{kg} = \frac{J}{kg}$$

Ecuatia lui Bernoulli in forma data de relatia anterioara poate fi interpretata astfel: lucrul mecanic de exterior L_M este folosit pentru:

- *cresterea energiei potentiale a fluidului*, exprimata prin termenul, $g(H_2 - H_1)$;
- *cresterea energiei cinetice a fluidului*, exprimata prin termenul, $\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$;
- *invingerea eventualelor diferente de presiune statica intre sectiunile sistemului*, $\frac{P_2 - P_1}{\rho}$;
- *acoperirea pierderilor de energie determinate de frecari si de inertie*, E_p

In calculele ingineresti ecuatia Bernoulli se utilizeaza si in alte forme:

- *ecuatia Bernoulli in termeni de presiuni:*

$$L_M \rho = \Delta P_T = \rho g(H_2 - H_1) + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + (P_2 - P_1) + \rho E_p \quad (\text{II.122})$$

in care fiecare termen are *dimensiunile unei presiuni*: $\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$

Intr-o forma mai restransa:

$$\Delta P_T = \Delta P_g + \Delta P_d + \Delta P_s + \Delta P_p \quad (\text{II.123})$$

unde:

$$\Delta P_g = \rho g(H_2 - H_1) \quad \Delta P_d = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta P_s = P_2 - P_1 \quad \Delta P_p = \rho E_p$$

- *ecuatia lui Bernoulli in termeni de inaltimi*. Se obtine prin impartirea ecuatiei exprimata in presiuni la ρg :

$$\frac{L_M}{\rho} = H_M = (H_2 - H_1) + \frac{1}{2g} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{(P_2 - P_1)}{\rho g} + \frac{E_p}{g} \quad (\text{II.124})$$

Raportul $\frac{L_M}{g} = H_M$ se numeste *inaltimea manometrica a*

sistemului, si reprezinta ca semnificatie fizica, inaltimea unei coloane de lichid a carei energie potentiala, gH_M , este egala cu enargia mecanica, L_M , consumata pentru transportul in sistemul dat a unitatii de masa de fluid.

$$H_g = H_2 - H_1 \quad (\text{inaltimea geometrica})$$

$$H_d = \frac{1}{2g} (v_2^2 - v_1^2) \quad (\text{inaltimea dinamica})$$

$$H_s = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} \quad (\text{inaltimea statica})$$

$$H_p = \frac{E_p}{g} \quad (\text{pierderile de energie in termeni de inaltime})$$

Deci:

$$H_M = H_g + H_d + H_s + H_p \quad (\text{II.125})$$

Se face precizarea ca indiferent de modul de exprimare a termenilor ecuatiei lui Bernoulli, semnificatia fizica a fiecarui termen este aceeași.

b) Pentru fluide compresibile (gaze) in curgere izoterma, densitatea si deci volumul specific depind de presiune.

Dependenta de presiune a volumului specific se obtine din ecuatia de stare a fluidului. Pentru gaze la presiuni moderate ecuatia de stare rezulta din legea gazelor perfecte.

$$PV = nRT \Leftrightarrow P = \frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{M} \Leftrightarrow P = \rho \frac{RT}{M}$$

$$V_s = \frac{RT}{MP}$$

Deci:

$$\int_{P_1}^{P_2} V_s dP = \frac{RT}{M} \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = \frac{RT}{M} \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (\text{II.126})$$

$$L_M = g(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{RT}{M} \ln \frac{P_2}{P_1} + E_p \quad (\text{II.127})$$

II.2.4.3.1. Aplicatii ale ecuatiei Bernoulli

Ecuatia Bernoulli are numeroase aplicatii ingineresti. Una dintre aplicatii consta in utilizarea valorii lucrului mecanic, L_M , necesar transportului unitatii de masa de fluid intr-un sistem dat – determinat din ecuatia Bernoulli – pentru calculul puterii necesare motoarelor ce actioneaza utilajele de transport (pompe, ventilatoare, suflante etc.).

Produsul dintre lucrul mecanic, L_M , si debitul masic de fluid, M_m , da tocmai puterea teoretica. Tinand cont de *randamentul global (total) al instalatiei de transport*, η_t , puterea necesara va fi data de relatia:

$$P = \frac{M_m L_M}{1000 \eta_t} = \frac{M_m g H_m}{1000 \eta_t} = \frac{M_v \rho g H_m}{1000 \eta_t} = \frac{M_v \Delta P_T}{1000 \eta_t} \quad (\text{II.128})$$